

El Problema de Aprender a Enseñar (I. La Enseñanza de la Resolución de Problemas)

PAUL R. HALMOS

Gracias a la *Mathematical Association of America* por autorizar la traducción¹ del artículo original² y su publicación³.

© The Mathematical Association of America.

La mejor forma de aprender es hacer; la peor forma de enseñar es hablar.

Sobre esto último: ¿ha notado que algunos de los mejores maestros del mundo son los peores conferencistas? (puedo probarlo, pero prefiero no perder tantos buenos amigos.) Y, por otro lado, ¿ha notado que los buenos conferencistas no son necesariamente buenos maestros? Una buena conferencia es usualmente sistemática, completa, precisa—y aburrida: es un mal instrumento de enseñanza. Cuando es dada por legendarios y destacados expositores como Emil Artin y John von Neumann, aún una conferencia puede ser una herramienta útil—su carisma y entusiasmo sobresalen lo suficiente para inspirar al que escucha para seguir adelante y hacer algo—parece que es tan divertido. Sin embargo, para la mayoría de los mortales ordinarios, que no son tal malos conferencistas como lo fue Wiener —¡ni tan estimulantes!— y no tan buenos

como Artin —¡ni tan dramáticos!— la conferencia es un instrumento de último recurso para la buena enseñanza.

La mejor forma de aprender es hacer;
la peor forma de enseñar es hablar.—P.H.

Mi prueba para lo que hace a un buen maestro es muy sencilla: es la pragmática de juzgar el desempeño por el producto. Si un maestro de estudiantes de posgrado consistentemente produce Doctores en Ciencias, que sean matemáticos y crean matemáticas de alta calidad, él es un buen maestro. Si un maestro de cálculo consistentemente produce graduados que se convierten en estudiantes sobresalientes de posgrado en matemáticas, o en ingenieros, biólogos o economistas líderes, él es un buen maestro. Si un maestro de tercer grado de la “nueva matemática”(o la vieja) produce consistentemente estudiantes sobresalientes de cálculo, o cajeros de mercados, o carpinteros, o mecánicos automotrices, él es un buen maestro.

Para un estudiante de matemáticas, escuchar a alguien hablar sobre las matemáticas difícilmente le hace mayor bien que a un estudiante de natación el escuchar a alguien hablar sobre la natación. Tú no puedes aprender la técnica de natación teniendo a alguien que te dice cómo poner tus brazos y piernas; y no puedes aprender a resolver problemas teniendo a alguien que te dice cómo completar el cuadrado o sustituir $\sin(u)$ por y .

¿Puede uno aprender matemáticas leyendo? Estoy inclinado a decir que no. Leer tiene una ventaja sobre escuchar porque leer es más activo —pero no mucho. Leer con papel y lápiz al lado es mucho mejor —es un gran paso en la dirección correcta. La mejor forma de leer un libro, sin embargo, ciertamente con papel y lápiz al lado, es mantener el lápiz ocupado y abandonar el libro. Habiendo

¹Traducción por E. Cómer-Barragán, Depto. de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Tijuana, TecNM. Email: comer@cemati.org

²Plática dada por el reconocido matemático Paul Richard Halmos (1916-2006) en la Reunión Anual Conjunta AMS-MAA, en San Francisco CA, EUA, el 17 de enero, 1974. Se le invita a leer el artículo original en inglés, cortesía de la Biblioteca Digital JSTOR, visitando: [~JSTOR](https://www.jstor.org/stable/2372833).

³*Observación*: una primer versión de esta traducción se publicó previamente en *Deliberaciones Matemáticas* Vol.1, A.1-4 (2009), como edición experimental.

declarado esta posición extrema. La derogo de inmediato. Conozco que es extrema, y realmente no es lo que quiero decir—pero quiero hacer mucho énfasis en no dejarse llevar con la idea de que aprender significa asistir a las conferencias y leer libros.

Si tuviéramos vidas más largas, y cerebros más grandes, y suficientes maestros expertos dedicados para tener una relación alumno/maestro de uno a uno, mantendría esta posición extrema —pero no los tenemos. Los libros y las conferencias no hacen buen trabajo en trasplantar los hechos y técnicas del pasado a la corriente sanguínea de los científicos del futuro —pero debemos tomar la segunda mejor opción para ahorrar tiempo y dinero. Pero, y este es el texto de mi sermón para hoy, si sólo dependemos de las conferencias y los libros, estamos haciendo a nuestros estudiantes, y a sus estudiantes, un grave perjuicio.

De lo que realmente trata la matemática es sobre la solución de problemas concretos.

Hilbert dijo una vez (pero no puedo recordar dónde) que la mejor forma de entender una teoría es encontrar, y luego estudiar, un ejemplo concreto prototipo de tal teoría, un ejemplo de raíz que ilustre todo lo que puede pasar. La falla más grande de muchos estudiantes, aún de los buenos, es que aunque pueden ser capaces de lanzar declaraciones correctas de teoremas, y recordar demostraciones correctas, no pueden dar ejemplos, construir contraejemplos, o resolver problemas especiales. He visto muchos estudiantes que pueden declarar algo que llaman el teorema espectral de operadores Hermiteanos en el espacio de Hilbert, pero que no tienen una idea de cómo diagonalizar una matriz simétrica real de 3×3 . Esto es malo —esto es mal aprendizaje, causado probablemente, al menos en parte, por mala enseñanza. El matemático profesional de tiempo-completo y el usuario ocasional de matemáticas, y todo el espectro de la comunidad científica en medio—todos necesitan resolver problemas, problemas matemáticos, y nuestro trabajo es enseñarles cómo hacerlo, o bien, enseñar a sus futuros maestros cómo enseñarles a hacerlo.

De lo que realmente trata la matemática es sobre la solución de problemas concretos.—P.H.

Me gusta empezar cada curso que enseñe con un problema. La última vez que enseñe el curso introductorio de teoría de conjuntos, mi primera oración fue la definición de números algebraicos, y la segunda fue la pregunta: ¿hay números que no sean algebraicos? La última vez que enseñe un curso introductorio de teoría de variable real, mi primera oración fue una pregunta: ¿existe una función continua no decreciente que mapea el intervalo unitario en el intervalo unitario de forma que la longitud de su gráfica es igual a 2? Para casi cualquier curso uno puede encontrar un conjunto pequeño de preguntas como éstas—preguntas que pueden hacerse con un mínimo de lenguaje técnico, que son lo suficientemente llamativas para captar el interés, que no tienen respuestas triviales, y que se las arreglan para contener, en sus respuestas, todas las ideas importantes de la materia.

La existencia de tales preguntas es lo que uno quiere decir cuando expresa que las matemáticas tratan realmente sobre la resolución de problemas, y mi énfasis en la resolución de problemas (en contraposición a asistir a conferencias o leer libros) está motivado por ellas.

Para casi cualquier curso uno puede encontrar un conjunto pequeño de preguntas como éstas—preguntas que pueden hacerse con un mínimo de lenguaje técnico, que son lo suficientemente llamativas para captar el interés, que no tienen respuestas triviales, y que se las arreglan para contener, en sus respuestas, todas las ideas importantes de la materia. —P.H.

Un dicho famoso de Pólya sobre resolución de problemas es que, si tú no puedes resolver un problema, entonces hay un problema más fácil que tampoco puedes resolver —¡encuétralo! Si puedes enseñar este dicho a tus estudiantes, enseñarlo de manera que ellos puedan enseñarlo a los suyos,

habrás resuelto el problema de crear maestros de resolución de problemas.

La parte más difícil de contestar preguntas es hacerlas; nuestro trabajo como maestros y maestros de maestros es enseñar cómo hacer preguntas.

La parte más difícil de contestar preguntas es hacerlas; nuestro trabajo como maestros y maestros de maestros es enseñar cómo hacer preguntas.—P.H.

Es fácil enseñar a un ingeniero a utilizar un libro de recetas de ecuaciones diferenciales; lo que es difícil es enseñarle (y a su maestro) qué hacer cuando la respuesta no está en el recetario. En ese caso, de nuevo, el problema principal probablemente sea “¿cuál es el problema?”. Encuentre la pregunta correcta a contestar, y estará avanzado en el camino hacia la resolución del problema sobre el cual trabaja.

¿Cuál es entonces el secreto —cuál es la mejor forma de enseñar a resolver problemas? La respuesta se implica por la oración con la que inicié: resuelve problemas.

El método que recomiendo se conoce algunas veces como el “método de Moore” ya que R. L. Moore lo desarrolló y utilizó en la Universidad de Texas. Es un método de enseñanza, un método para crear la actitud de resolución de problemas en un estudiante, el cual es una mezcla de lo que Sócrates enseñó y el espíritu competitivo y feroz de los juegos Olímpicos. La forma en que un mal conferencista puede ser un buen maestro, en el sentido de producir buenos estudiantes, es la forma en que un grano de sal puede producir ostras productoras de perlas. Una conferencia suave y un libro titulado “Álgebra introductoria para adolescentes⁴” puede ser agradable; un buen maestro desafía, pregunta, incomoda, irrita, y mantiene altos estándares—todo lo cual es generalmente no placentero.

⁴N. del T. Se utilizó *adolescentes* parafraseando respetuosamente el término original en inglés.

¿Cuál es entonces el secreto —cuál es la mejor forma de enseñar a resolver problemas? La respuesta se implica por la oración con la que inicié: resuelve problemas.—P.H.

Un buen maestro puede que no sea popular (excepto posiblemente con sus ex-alumnos), porque a algunos estudiantes no les gusta ser desafiados, cuestionados, incomodados e irritados —pero él produjo perlas (en lugar de lanzarlas de la manera proverbial).

Un buen maestro desafía, pregunta, incomoda, irrita, y mantiene altos estándares. —P.H.

Permítanme contarles de la ocasión que enseñé un curso de álgebra lineal para estudiantes de segundo semestre. La primera hora repartí a cada estudiante algunas hojas de papel donde estaban escritas las declaraciones precisas de cincuenta problemas. Sólo eso—justamente las proposiciones de los teoremas. No había introducción, ni definiciones, no había explicaciones, y ciertamente, tampoco había demostraciones. El resto de la primera hora hablé al grupo algo sobre el método de Moore. Les dije que dejaran de leer álgebra lineal (¡tan sólo por ese semestre!), y dejar de consultarse el uno al otro (sólo para dicho semestre). Y les dije que el curso estaba en sus manos. El curso eran esos cincuenta teoremas; cuando los entendieran, cuando los pudieran explicar, cuando los pudieran apoyar con los ejemplos y contraejemplos necesarios, y claro, cuando los pudieran demostrar, entonces habrían terminado el curso. Se quedaron mirándome fijamente. No me creían. Creyeron que simplemente tenía pereza y quería ahorrarme trabajo. Estaban seguros que nunca aprenderían algo de esa manera. Todo esto no tomó más de media hora. Terminé la hora dándoles las definiciones básicas que ocupaban para entender aproximadamente la primera media docena de teoremas, y dándoles mis buenos deseos, los dejé a su suerte. La segunda hora, y cada hora sucesiva, le pedí a Smith demostrar el teorema 1, a Kovacs demostrar el teorema 2, y así

sucesivamente. Animé a Kovacs y a Herrero y a todos, a observar a Smith como halcones, y a caerle si se equivocaba. Yo mismo escuchaba tan cuidadosamente como podía, y aunque trataba de no ser sádico, yo también caía cuando sentía la necesidad. Señalaba brechas, constantemente decía que no entendía, hacía preguntas sobre asuntos laterales, preguntaba y algunas veces ofrecía contraejemplos, les hablaba de la historia de la materia cuando tenía la oportunidad, y señalaba conexiones con otras partes de la matemática. Además, tomaba aproximadamente cinco minutos de la mayoría de las horas para introducir las nuevas definiciones requeridas. En conjunto probablemente hablé 20 minutos de cada 50 minutos de las horas académicas que estuvimos juntos. Esto es mucho —pero es mucho menos que 50 (o 55) de los 50. Funcionó de maravilla. A la segunda semana estaban demostrando teoremas y encontrando errores en las demostraciones de otros, y obviamente encontrando placer en el proceso. Algunos de ellos tuvieron la gracia de buscarme y confesar que al principio estaban escépticos, pero luego se convirtieron. La mayoría de ellos dijeron que dedicaron más tiempo a la materia que a sus otros cursos dicho semestre, y que aprendieron más.

La «actitud de investigación» es una tremenda ayuda para todos los maestros, estudiantes, creadores, y usuarios de las matemáticas. —P.H.

Lo que acabo de describir es semejante al “método de Moore” como R. L. Moore lo usaba, pero es un método de Moore muy modificado. Estoy seguro que podrán hacerse cientos de modificaciones, para adaptarse a los temperamentos de diferentes maestros y a las necesidades de diferentes materias. Los detalles no importan. Lo que importa es hacer que los estudiantes formulen preguntas y las contesten. Muchas ocasiones cuando he utilizado el método de Moore, mis colegas me han comentado, posiblemente un semestre o dos después, que pueden reconocer aquellos estudiantes en sus clases, que han sido expuestos a una “clase de Moore” por las actitudes y comportamiento de dichos estudiantes.

Las características distintivas son mayor madurez matemática que la de otros (la actitud de investigación), y una mayor inclinación y habilidad para formular preguntas penetrantes.

La “actitud de investigación” es una tremenda ayuda para todos los maestros, estudiantes, creadores, y usuarios de las matemáticas.

Para ilustrar, por ejemplo, cómo es una ayuda para mí cuando enseño cálculo elemental (a una clase que es demasiado grande para utilizar con ella el método de Moore). Debo antes hacer alarde ante ustedes de mi maravillosa memoria. Maravillosamente mala quiero decir. Si no enseño cálculo digamos por un semestre o dos, lo olvido. Olvido los teoremas, los problemas, las fórmulas, las técnicas. Como resultado, cuando preparo la clase de la siguiente semana, lo que hago dando un vistazo al programa pre escrito, o si no lo hay, a la tabla de contenido del texto, pero nunca en el texto mismo, empiezo casi de cero —hago investigación en cálculo. El resultado es que tengo más diversión que si lo tuviera todo memorizado, que una y otra vez me sorprende genuinamente y me agrado de algunos estudiantes que redescubren lo que Leibniz probablemente sabía cuando era un adolescente, y que mi disfrute, sorpresa, placer y entusiasmo se siente por el grupo, y se toma como un reconocimiento a cada uno de los descubridores.

La mejor forma de aprender es hacer —preguntar y hacer. La mejor forma de enseñar es hacer que los estudiantes pregunten, y hagan. No predique hechos —estímule acciones. —P.H.

Para enseñar la actitud de investigación, cada maestro debe hacer investigación y debe tener entrenamiento en hacer investigación. No estoy diciendo que cada uno que enseña trigonometría deba pasar la mitad de su tiempo demostrando teoremas abstrusos sobre teratología categórica y unirse a la carrera “publica -o- perece”. Lo que estoy diciendo es que cada uno que enseña, aún si enseña álgebra de secundaria, sería un mejor maestro si pensara

sobre las implicaciones de la materia fuera de la materia, si lee sobre las conexiones de la materia con otras materias, si trata de resolver los problemas que tales implicaciones y conexiones sugieren— si, en otras palabras, si hace investigación en y alrededor del álgebra de secundaria. Esa es la única forma de mantener la actitud de investigación, la actitud de formulación de preguntas, viva en uno mismo, y así conservarla en una condición adecuada para ser transmitida a otros.

Aquí está, resumido, en unas cuantas cáscaras de nuez: La mejor forma de aprender es hacer —preguntar y hacer. La mejor forma de enseñar es hacer que los estudiantes pregunten, y hagan. No

predique hechos —estímule acciones. La mejor forma de enseñar a los maestros es hacer que ellos pregunten y hagan lo que ellos, a su vez, harán a sus estudiantes preguntar y hacer. Buena suerte, y feliz enseñanza, para todos ustedes. λC^i

Sugerencia básica para citar:

Halmos, P. R. (2023) *El Problema de Aprender a Enseñar (I. La Enseñanza de la Resolución de Problemas*)* (E. Cómer-Barragán, Trad.) *Deliberaciones Matemáticas 1* (2023) 3-7. (Publicado originalmente en 1975: *The American Mathematical Monthly* 82, No. 5, 466-470 © The Mathematical Association of America).